**分类号 论文选题类型**

**U D C 编号**



**本科毕业论文（设计）**

**题 目 数分中几类重要的不等式**

**学 院 数学与统计学学院**

**专 业 数学与应用数学（师范）**

**年 级 2018级**

**学生姓名 徐璐瑶**

**学 号 2018213776**

**指导教师 罗鹏**

**二○ 二二 年 四 月**

**华中师范大学**

**学位论文原创性声明**

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师指导下独立进行研究工作所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名： 日期： 年 月 日

**学位论文版权使用授权书**

本学位论文作者完全了解学校有关保障、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关学位论文管理部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权省级优秀学士学位论文评选机构将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密 □ ，在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

2、不保密 □。

（请在以上相应方框内打“√”）

学位论文作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

**目　录**

内容摘要………………………………………………………………………………4

关 键 词………………………………………………………………………………4

Title…………………………………………………………………………………4

Abstract………………………………………………………………………………4

Key Words ……………………………………………………………………………5

1**．引言**………………………………………………………………………………6

1.1研究背景…………………………………………………………………6

1.2研究发展现状……………………………………………………………7

1.3研究内容…………………………………………………………………9

1.4研究方法…………………………………………………………………9

1.5研究目的及意义…………………………………………………………9

2．均值不等式………………………………………………………………………10

2.1均值不等式的证明…………………………………………………… 10

2.2均值不等式的推广…………………………………………………… 11

2.3均值不等式例题分析………………………………………………… 12

3.伯努利不等式……………………………………………………………………15

3.1 伯努利不等式的证明…………………………………………………15

3.2伯努利不等式的推广………………………………………………… 15

3.3伯努利不等式例题分析……………………………………………… 16

4．柯西不等式………………………………………………………………………18

4.1柯西不等式的证明……………………………………………………18

4.2柯西不等式的变式及推广……………………………………………19

4.3柯西不等式例题分析…………………………………………………20

5.总结………………………………………………………………………………22

5.1研究的不足与展望……………………………………………………22

5.2结束语…………………………………………………………………23

参考文献…………………………………………………………………………… 24

致 谢…………………………………………………………………………………25

**摘要：**大概从人类开始有对于数量的认知时，不等式的概念就产生了。不等式自产生之日起便被用来解决日常工作中的问题。作为中学乃至大学代数中的一个重要内容，不等式有关理论为数学的发展带来了强大的推动力，同时也为其他学科的研究奠定了基础。本文从《数学分析第四版》华东师范大学数学系编上册出发，提取出书中所涉及的不等式中的三类：均值不等式、伯努利不等式、柯西不等式，并对此三类不等式进行探究。

本文将紧紧围绕《数学分析》（上）教材展开，将此三类不等式置于不同的板块，在研究其证明过程之后，引进其推广或变式，并在每一个板块的最后加入不等式对应例题进行解答，例题从高中数学跨越至大学数学，并加入分析找出每道题不等式的用途。整体而言，不等式的推广变式与例题引用会在教材中挖掘，紧扣本文主题，在体现此三类不等式在数分教材中的重要性的同时，提高数学自我思维能力，提升数学整体素养。

**关键词：**数学分析；不等式；均值不等式；伯努利不等式；柯西不等式

**Title: Several important inequalities in Mathematical analysis**

**Abstract:** The concept of inequality has been around since the beginning of man's knowledge of quantity. Inequality has been used to solve problems in daily work since its inception. As an important content in middle school and even college algebra, inequality theory has brought a strong impetus to the development of mathematics, but also laid a foundation for the study of other subjects. Based on the first volume of The fourth edition of Mathematical Analysis, this paper extracts three kinds of inequalities: mean inequality, Bernoulli inequality and Cauchy inequality, and explores these inequalities.

This article will focus on "mathematical analysis" (on) the teaching material, put the three types of inequality in different sectors, in the research process on the proof, after introducing its promotion or variant, and at the end of each sector to join corresponding sample answer and examples spanning from high school mathematics to mathematics in university and then join to analyze inequality purposes on each question. overall, the generalized variations and examples of inequalities will be mined in the teaching materials, closely related to the theme of this paper, while reflecting the importance of these three inequalities in the mathematical teaching materials, improving mathematical self-thinking ability and improving the overall quality of mathematics.

**Key Words:** Mathematical Analysis; Inequality; Mean inequality; Bernoulli inequality; Cauchy inequality

**1.引言**

**1.1研究背景**

《数学分析第四版》华东师范大学数学系编是大学里数学专业学生的专业教材，用于数学分析课程的学习。数学分析的创立始于17世纪以牛顿和莱布尼兹为代表的开创性工作，而完成于19世纪以柯西和威尔斯特拉斯为代表的奠基性工作。

数学分析以函数为研究对象，它从局部和整体这两个方面研究函数的基本形态，从而形成微分学和积分学的基本内容。微分学研究变化率等函数的局部特征，导数和微分是它的主要概念，求导数的过程就是微分法。微分学的主要内容为围绕着导数与微分的性质、计算和直接应用。积分学则从总体上研究微小变化积累的总效果，尤其重视对非均匀变化的研究，以原函数和定积分为基本概念，而其求积分的过程就构成了积分法。积分学的主要内容涉及到积分的性质、计算、推广与直接应用。谈及历史，为数学分析的建立与成型做出伟大贡献的两位数学家，牛顿和莱布尼兹，他们在1670年左右，总结出了求导数与求积分的一系列基本法则，发现了求导数与求积分这两种互逆的运算，并通过后来以他们的名字命名的著名公式——牛顿·莱布尼兹公式——反映了这种互逆关系，从而使得本来各自独立发展的微分学和积分学结合而成一门新的学科—微积分学。而后，又在他们的后继数学家的推动下，如欧拉，使得本来仅为少数数学家所了解，只能较为粗略地解决一系列简单且具体的问题的微分与积分方法，成为一种常人稍加训练即可掌握的唾手可得的方法，由此便打开了把它广泛应用于各类科学技术领域的大门，产生不可估量的作用与影响。因此，微积分的出现与发展被认为是人类文明史上划时代的数学事件之一。数学分析中，无穷级数也有所涉及。历史上，无穷级数的使用由来已久，但只在成为数学分析的一部分后，才得到真正的发展和广泛应用。在数学分析中，无穷级数与微积分从来都是密不可分和相辅相成的，但与积分的连续性相比，无穷级数虽也是微小量的叠加和积累，却采取了离散的形式。

《数学分析第四版》华东师范大学数学系编分上下两册，共二十三章。与上文类似，全书以实数集与函数开头，对数列以及函数的极限进行定义探寻，导数和微分与高中知识接轨，接着从不定积分、定积分、反常积分中对积分进行系统研究，紧接着级数、多元函数的极限与连续性、多元函数微分学登场，含参量积分、曲线积分、重积分、曲面积分将积分与几何紧密联系。这些内容也构成了数学分析课程的主要内容。全书知识结构紧凑，为后续更深入细化的数学分支的学习奠定了基础。同时，该书的内容设置，在一定程度上也展现出数学分析这门学问变迁的脉络。

**1.2 研究发展现状**

不等式有关理论作为古老的自然科学一大分支，数年来都是学者们研究的热门。国内外对于不等式的研究趋于高深、复杂、多极化。从历史上来看，中国数学家在不等式领域做出了卓越的贡献，如华罗庚先生；近年来，中国的数学学者们也不断活跃在国际数学不等式及其应用的领域中。单一类别的不等式研究，如Hilbert不等式，对其参量化、积分形式、积分形式的推广等都有不同研究报告的呈现；再到各类不等式证明方法的多样化研究，如针对中等数学的用向量法、概率方法等证明不等式，到高等数学中运用数学分析方法的证明；再有将数学文化融入不等式的研究与教学中，如从信息技术入手和课堂艺术出发……不等式的研究多维且深入，拓展到生活的方方面面。

均值不等式的研究发展现状可谓是极为全面，其妙用不只是在数学方面呈现，物理等其他学科也均有涉足。均值不等式的研究涵盖了其适用条件、性质、证明方法等诸多方面，均值不等式也被运用到求解不同类型的题目中，如最值问题、数列问题等[3]。戴伟在《关于均值不等式的一个证明》中更是利用均值不等式给出了酉矩阵的一个刻画[7]。谈及国外，Davit Harutyunyan对几何-算术平均值不等式进行了加强[15]；Mohammad Sal Moslehian等人更是给出了不定型的算术-几何均值不等式的形式[14]。

伯努利不等式由瑞士数学家伯努利提出，其一般形式笔者将在后文中给出。国外的研究中，其涉及到原函数和双曲函数等多种函数形式，也对负指数形式进行了探索；在国内，马玉梅等在《微积分教学中几个问题的思考》中对的奇偶性进行探讨，得出的取值范围，并将伯努利不等式应用到Jacobsthal不等式[8];杨克昌在《一类不等式的加强与综合》中利用伯努利不等式解决含参变量的不等式[13]……伯努利不等式的研究主要运用到其推广形式，在高深的数学领域中依旧有深入探讨的必要。

柯西不等式的一般形式及变式形式有多种，笔者将会在后文给出一二。柯西不等式就其发展进程、证明方法、运用形式、改进方式都是研究的方向，如陈明在《柯西不等式的几点注记》中对柯西不等式的证明，以及其在函数求最值、证明不等式、几何上的广泛应用进行了阐述，展现出柯西不等式在数学理论中的重要地位[10]。

随着不等式理论的不断发展，多种多样的多项式也出现在人们视线中。均值不等式、伯努利不等式、柯西不等式作为最基础的三类重要的不等式，融入到各类不等式的研究中，体现出不同性质下的价值。

**1.3 研究内容**

本文主要对《数学分析第四版》（华东师范大学编）中所涉及的三类不等式：均值不等式、伯努利不等式、柯西不等式的证明、推广变式及例题进行分析，并进一步给出教材以外的相应高中数学或大学数学例题，展现出不等式在不同阶段的运用，加深学生对此三类不等式的理解与掌握，从而体现出不等式的应用和教育价值。

**1.4 研究方法**

通过对以上所涉及知识的研究与分析，本文运用的主要方法为文献参阅法：通过查阅资料研究上文所提及的三类不等式，了解其发展，掌握其证明，熟悉其应用，查阅的主要资料为期刊论文、博硕士学位论文等。

**1.5 研究目的及意义**

不等式无论从其基础性还是重要性而言都具有重大的研究意义，在解题中巧妙运用不等式总会让人眼前一亮，但碍于自身数学能力的不足，总会有很多人难以发现不同不等式的构造与使用方法，尤其是当题目变得复杂时。本文具体从《数学分析第四版》（华东师范大学编）出发，总结出三类不等式:均值不等式、伯努利不等式、柯西不等式，将其在书中例题的应用整合并推广，体现出该三类不等式在数分中的重要性的同时，给出更多相应例题，让例题从高中数学跨越至大学数学，不仅展现出三类不等式在数分教材外的突出作用和应用办法，也表现出三类不等式在不同阶段下的不同妙用，从而整体达到对不等式及其应用更深入的认识，体现出不等式的应用和教育价值。

**2.均值不等式**

均值不等式，又称为平均值不等式、平均不等式，是数学中的一个重要公式。公式内容为，其中 ,被称为调和平均数； ,被称为几何平均数； ,被称为算术平均数； ,被称为平方平均数。即调和平均数不超过几何平均数，几何平均数不超过算术平均数，算术平均数不超过平方平均数。均值不等式的二维形式在高中就得以呈现，大学数学中对其进行了更深入的证明与推广。

**2.1 均值不等式的证明**

均值不等式的证明有多种，代数类、三角类、几何类、函数类方法都可进行证明[4]，因篇幅限制，现只用数学归纳法对其进行证明。证明之前，我们需要一个辅助结论。

引理：若,则,当且仅当时等号成立。该引理可用二项式定理进行证明。

证明：先证明，该命题等价于。下用数学归纳法进行证明。

当时结论成立；

当时，即证 ，即证，结论成立；

不妨设时结论成立，即，当且仅当时等号成立。

当时，不妨设为中的最大者，则有。令，则,由引理可得，当且仅当且时，即时等号成立，所以得证。

下证明，即，该命题等价于，等价于 ,根据上文即可得证。

下证明，即，该命题等价于,等价于,等价于,显然成立。

综上所述，成立，原命题得证。

**2.2 均值不等式的推广**

均值不等式因其强大的应用能力而得到了广泛的推广。数分教材第六章《微分中值定理及其应用》中，给出了其中一种推广——詹森（Jensen）不等式，其一般形式为：若为上凸函数，则对任意, 有 成立[1]。

詹森不等式为关于凸性的不等式，用于积分中，它给出了积分的凸函数和凸函数的积分值之间的关系；用于概率论中，可以表示概率密度函数的关系。詹森不等式同样可以用数学归纳法进行证明，数学分析教材中给出了详细证明。该不等式在多个领域有重要作用，如统计物理学和信息论。

**2.3 均值不等式例题分析**

均值不等式例题常出现于高中和大学的各类数学题目中，在其他学科里也有解题妙用。现聚焦于高中数学竞赛和高考类题目，给出相应例题。

**例1 ：**已知

证：不等式

等价于

等价于

由均值不等式得：

所以原不等式成立，得证。

分析：该例题是直接对均值不等式的等价变形，这是运用均值不等式时最基本的解题策略之一。

**例2:**已知[4]

证：由可知

两式相加，整理得：

所以有

同理，

从而

又由

我们可知

故

所以原不等式成立，得证。

分析：该例题先是重新对整个式子进行构造，接着再利用均值不等式进行求解。构造法的使用需要注意均值不等式成立的条件。

**例3:**设

证明：因为

所以

即，当且仅当时两次等号 成立。

故原命题得证。

分析：该题目两次运用均值不等式进行求解，题目条件中的等式可以用于替换常数构造均值不等式成立的结构。本题也需注意等号成立的条件，等号成立需考虑两次运用均值不等式取等的条件。

当然，均值不等式在大学数学中也有着自己的一席之地，常见于用其解决数列方面的问题。现着眼于大学数学知识点，给出均值不等式的妙用。

**例4：**若

证：由当时，有

于是当时，有

其中

又因为,所以对上面的，存在正整数，使得时， 有，取,则当时，有

故有

根据均值不等式有，

又有，

所以由迫敛性得

原命题成立，得证。

分析：该题目为数分教材第二章《数列极限》习题中的一道，运用均值不等式内容中的这一不等式，通过夹逼法得出数列极限。由此可见，本题中利用均值不等式进行放缩的程度适当，以后的题目在运用放缩的方法时也需时刻注意放和缩的“度”。

**3．伯努利不等式**

伯努利不等式又可叫贝努利不等式，其一般形式为：且，和，有 成立。伯努利不等式在高中就有了一定的贯彻和应用，其针对幂函数到一次函数的放缩，丢掉了次数，大大简化了解题难度。

**3.1 伯努利不等式的证明**

伯努利不等式的证明可用二项式定理、求导等多种办法进行，这里跟随上文的脚步，继续用数学归纳法论证其证明。

证明：当时结论成立；

当时，即证,即证,结论成立

不妨设结论成立，即

当时，

展开得到：

原式得证。

**3.2 伯努利不等式的推广**

伯努利不等式可推广到实数幂的形式：若，有；若，有。同时，伯努利不等式还可进一步推广为：，对都有同号且。

伯努利不等式是Jacobsthal’s inequality的基础：当时，.该不等式常应用于神经网络稳定性的分析。

**3.3 伯努利不等式例题分析**

伯努利不等式中，从幂函数到一次函数放缩的思想值得大家推敲。在高中数学里，利用该思想， 这个公式实现了从指数函数到一次函数的放缩，该公式也是高中导数解题应用中最常见且最重要的公式之一。除了其蕴含的转化放缩的数学思想外，伯努利不等式也经常用作解决实际问题的关键步骤，其一般形式及推广同样在高中数学中便也已经展露其锋芒，现给出实例进行论证。

**例1:**已知数列满足：，且，证 明：对于一切正整数，不等式

证：易得

故即证

由伯努利不等式可知：

故原命题得证。

分析：该题目为06年江西高考理科数学题，运用伯努利不等式的推广形式便可快速解题。本题中该不等式的使用展现出其与众不同的将乘法运算转换为加减法运算的特质，这是其放缩特点的体现。

当然大学数学中伯努利不等式的应用也极为广泛，下面给出相应例题。

**例2：**证明，其中 [1]

证：当时，结论显然成立.

现设.记,则.由

得.

对当时，有，即.所以有

成立

现设,则。由上可知，,即,即

有成立。

综上所述，时，，原命题得证。

分析：该例题为数分教材第二章《数列极限》中的题目，运用伯努利不等式的一般形式进行放缩，得出题目所求极限。该极限也为所有求极限类题目中最基础的极限形式。

**例3:**求数列的极限.[1]

解：记,其中,则有

由上式得,从而有

因为数列收敛于1，所以 ，当时，.故由迫敛性可知，

分析：该例题也为数分教材《数列极限》中的题目，运用了伯努利不等式的变式形式，第一步的放缩为最亮眼的一笔。

**4.柯西不等式**

柯西不等式是法国数学家柯西在研究数学分析中“留数”中所得，但从历史上来讲，其应为柯西与布尼亚科夫斯基和施瓦茨的共同杰作，称为Cauchy-Buniakowsky-Schwarz不等式,因后面两位数学家彼此独立地在积分学中推而广之。柯西形式一般形式为,当且仅当或中至少一方全为零时等号成立。柯西不等式的二维形式最为常见，为高中数学竞赛的基础，除此之外，其向量形式、三角形式概率形式等也被广泛应用[9]。

**4.1 柯西不等式的证明**

柯西不等式的证明方法同样有多种，这里同上文证明方法，用数学归纳法进行证明。

证明：当时，结论成立

当时，即证,即证,即证，当且仅当时等号成立或中至少一方全为零时等号成立，故结论成立

不妨设时结论成立，即, 当且仅当或中至少一方全为零时等号成立。

当时，， 要证明，即证，即证,当且仅当,即或中至少一方全为零时等号成立,故结论成立。

综上所述，原命题得证。

**4.2 柯西不等式的变式及推广**

柯西不等式的变式形式有多种，数分教材在第九章《定积分》习题中给出了两类其变式形式——施瓦茨（Schwarz）不等式和闵可夫斯基（Minkowski）不等式。

施瓦茨（Schwarz）不等式：若在上可积，则.

闵可夫斯基（Minkowski）不等式：若在上可积，则.

施瓦茨不等式可利用柯西不等式进行证明，下文会给出示例；闵可夫斯基不等式可利用施瓦茨不等式进行证明，具体证明方法可见数学分析教材的习题精解。施瓦茨不等式和闵可夫斯基不等式也是两类重要的数学不等式，可在各类学科中运用，在各类理论研究中占据重要地位。

除教材上给出的推广，柯西不等式还可推广出赫尔德（Hölder）不等式.

赫尔德（Holder）不等式:设满足,则有.等号成立当且仅当

该不等式在Young不等式的基础上证明较为简便，Young不等式这里不再给出，有兴趣的读者可自行查阅资料进行解答。

**4.3 柯西不等式例题分析**

柯西不等式尤得高中数学竞赛的青睐，高中数学竞赛中一直都有柯西不等式的影子，现给出实例。

**例1:**设实数满足,求证：. [9]

证： 由

可知

所以有

故原命题得证。

分析：该题目是均值不等式和柯西不等式的综合应用，第一步的化简为后面柯西不等式三维形式的给出创造了条件。学生求解该题最重要的便是构造出与题目条件相关的之间的关系式，并变换形式以使用柯西不等式得出答案。

**例2:**函数[12]

解：

令，即

当且仅当 即时等号成立

故原命题最大值为

分析：该题目是柯西不等式在最值方面上的应用，难点在于运用待定系数法消掉未知量，并构造出柯西不等式作用的形式与条件。运用于该题，此方法可求出含有两个根号的函数的最值，熟能生巧以后，也可为含有多个根号的函数最值指明一条解题道路。

现具体来看看柯西不等式在大学数学中的巧妙运用。

**例3:**证明施瓦茨（Schwarz）不等式：若在上可积，则. [1]

证明：因为在上可积，所以根据定积分的定义可知：

其中对给出分割,任取

同理可得，

现只需要证

由柯西不等式可知：

故原命题得证。

分析：该例题为数学分析教材《第九章》总复习习题中的一道，在理解了定积分原始定义的基础上利用柯西不等式进行解题。该例题也可通过构造积分不等式进行求解。

**5.总结**

**5.1 研究的不足与展望**

因才疏学浅，篇幅限制，此次论文中涉及到的三类不等式，笔者均未给出较为详细、充分的证明或是推广，所给例题量也不足以展现出三类不等式的重要程度。该三类不等式单是从数学这一门学科的角度来看，其应用远不止上文例题所涉，笔者在此论文结束后，也不会停止继续探索此几类不等式的脚步，希望能挖掘出更多不等式的精彩。

**5.2 结束语**

全文虽只是对均值、伯努利和柯西不等式进行分门别类的总结，但若用心便可发现，这三类不等式实则你中有我，我中有你，环环相扣。每一类不等式进行适当变形都可推出另一类的一些形式出来,所以在解题时往往不只一类不等式可以派上用场。这就要求我们开放思维，放宽眼界，从不同的角度入手，找寻运用不等式的方式。同时，三类不等式的例题虽是从高中阶段解题到大学阶段解题的跨越，加入了更多的数学分析课程所涉知识点，如数列极限、积分等，但不等式作用的式子结构和条件却是极为相似，万变不离其宗。这也是要求我们在掌握不等式的同时，牢牢记住不等式成立的条件以及构造出可以运用不等式的式子结构。当然,不等式的有关理论与应用远不止上文所及，还望读者们能一直保持着对数学的热情，对不等式的好奇，在数学学习的道路上获得更多的数学理论知识与学习经验，提升数学素养的同时，获得学习数学的乐趣。

**参考文献：**

[1] 华东师范大学数学系.数学分析（上册）[M].北京:高等教育出版社,2010:154.

[2]李超. “高观点”下高中导数解题及教学研究[D].云南师范大学,2021.

[3]刘孝伟.均值不等式解高考题综述[J].数理化学习：高中版,2002,(15)

[4]贾静. 关于均值不等式的教学探究及应用[D].西北大学,2017.

[6]孙明保,李新平,杨雄,夏汝刚,张佩佩.均值不等式在求解数列问题中的应用举例[J].湖南理工学院学报(自然科学版),2020,33(04):5-6+44.

[7]戴伟.关于均值不等式的一个证明[J].淮北师范大学学报(自然科学版),2020,41(01):29-32.

[8]马玉梅,刘恒,周文书,王金芝,齐淑华.微积分教学中几个问题的思考[J].大连民族大学报，2020,22(05):434-436.

[9]李梦. 数学竞赛中柯西不等式的教学研究[D].华中师范大学,2019.

[10]陈明.柯西不等式的几点注记[J].遵义师范学院学报,2018,20(06):99-101.

[11]苏裕华.一道北大“强基”试题的解法与拓展[J].中学数学教学,2021(06):52-55.

[12]朱小扣,樊惟媛.聚焦柯西不等式在竞赛中四大运用[J].数理化解题研究,2020(19):78-80.

[13]杨克昌.一类不等式的加强与综合[J].岳阳大学学报,1997(02):37-40.

[14]Mohammad Sal Moslehian,Takashi Sano,Kota Sugawara. The arithmetic-geometric mean inequality of indefinite type[J]. Archiv der Mathematik,2021(prepublish).

[15]Davit Harutyunyan. When the Cauchy Inequality Becomes a Formula[J]. The American Mathematical Monthly,2018,125(9).

**致谢**